

TD Développements limités

Quelques DLs

QAV Exercice 1 🏠 ✍

1. $DL_3(0)$ de $\arctan \frac{x}{1-x}$
2. $DL_3(0)$ de $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$
3. $DL_4(0)$ de $\cos(xe^x)$
4. $DL_5(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+4x^2}}}$

N7H Exercice 2 ✍ $DL_5(0)$ de $g: x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$.

I7H Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer un $DL_m(0)$ de $\frac{1}{(1-x)^n}$.

X8N Exercice 4 ✍ 1. Décomposer $\frac{1}{1+x+x^2}$ en éléments simples. 2. Développement limité en 0 à l'ordre n de $\frac{1}{1+x+x^2}$.

60Z Exercice 5 ✍ 1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} x^k + o(x^n)$. 2. En déduire un DL en 0 de $\arcsin x$ à l'ordre $2n+1$.

0U9 Exercice 6 Donner le $DL_{10}(0)$ de $\ln \left(\sum_{k=0}^9 \frac{x^k}{k!} \right)$.

Applications

G42 Exercice 7 Soit $f: x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$.

1. Effectuer le $DL_2(0)$ de f .
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0.

3XM Exercice 8 🏠 Soit $u_n = (n \ln(n+1) - n \ln n)^n$. Déterminer la limite de u_n .

URM Exercice 9 ✍

1. Déterminer le $DL_2(1)$ de $\arctan$
2. On pose $f(x) = x \arctan \frac{x+2}{x-1}$. Montrer que f admet en $+\infty$ une asymptote que l'on précisera.
Indication : Commencer par faire un $DL(+\infty)$ de $\frac{x+2}{x-1}$.
3. Préciser la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

W91 Exercice 10 ✍ On considère H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et expliciter sa dérivée.
2. Montrer que $u: x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. Déterminer la limite de H en 1^+ .

8D1 Exercice 11 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

1. Montrer l'existence de $a > 0$ tel que f soit strictement décroissante sur $[-a, 0]$ et strictement croissante sur $[0, a]$.
2. Soit $b = \min(f(-a), f(a))$. Montrer que pour tout $\lambda \in [0, b]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution $x_1(\lambda)$ dans $[-a, 0]$ et une unique solution $x_2(\lambda)$ dans $[0, a]$.
3. Déterminer des équivalents de $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ en 0^+ .
4. ★ On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$. Étudier la limite en 0 de $\frac{x_1(\lambda) + x_2(\lambda)}{\lambda}$.

Existence et unicité

NRW Exercice 12 ✍ Déterminer $\arctan^{(n)}(0)$.

MEG Exercice 13 ✍

1. Justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\tan x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^6)$.
On se propose de déterminer a et b de plusieurs façons différentes :
2. En effectuant le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\cos x}$.
3. En écrivant que $\tan' = 1 + \tan^2$ et en procédant par identification des deux développements limités obtenus.
4. En utilisant le DL de $\arctan$ et la relation $\tan(\arctan x) = x$.

CU1 Exercice 14 ✍ Soit $f: x \mapsto 2 \tan x - x$, définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que f admet une réciproque impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Donner le $DL_6(0)$ de f^{-1} .

HEG Exercice 15 Soit f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(e^{\frac{1}{x^4}})$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = o_0(x^n)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier brièvement que f' n'admet pas de limite en 0.
3. a) Une fonction dérivable admettant un DL d'ordre 2 en un point est-elle nécessairement «deux fois dérivable» en ce point ?
b) Si f est dérivable et admet un DL d'ordre n , sa dérivée admet-elle nécessairement un DL d'ordre $n-1$ au même point ?
c) Deux fonctions admettant le même DL à tout ordre en un point a sont-elles nécessairement égales au voisinage de a ?

V42 Exercice 16 Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' soit strictement positive.

1. Montrer que pour tout $h > 0$, il existe un unique réel $\theta_h \in]0, 1[$ tel que $f(a+h) - f(a) = hf'(a + h\theta_h)$.
2. Déterminer la limite de θ_h quand $h \rightarrow 0$.

Y9C Exercice 17 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2)$.

1HJ Exercice 18 On considère la fonction $f: x \mapsto (\arcsin x)^2$.

- Justifier que f admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en note a_n les coefficients.
- On pose $g = f'$. Justifier que g admet un $DL_n(0)$ impair et vérifie l'équation $(1 - x^2)g'(x) - xg(x) = 2$ sur un intervalle à préciser
- On note c_n le coefficient en x^n du $DL_n(0)$ de g . Montrer que $c_1 = 2$ et $c_{n+1} = \frac{n}{n+1}c_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire que si $n \geq 2$ est pair, alors $a_n = \frac{1}{2} \frac{2^n (\frac{n}{2} - 1)!^2}{n!}$ et que $a_n = 0$ sinon.

GPV Exercice 19 ★ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On considère $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

- On suppose que pour tout $k \leq n + 1$, $f^{(k)}(0) = 0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $\forall k \leq n$, $g^{(k)}(0) = 0$.
- En déduire que dans le cas général, g est de classe $\mathcal{C}^n$, et expliciter $g^{(n)}(0)$ en fonction de f .

GBT Exercice 20 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(0) > 0$ et X^{n+1} divise $P(X)^2 - 1 - X$. Expliciter les coefficients de P .
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que la matrice $I_n + M$ admet une racine carrée.

Formules de Taylor globales

LHL Exercice 21 🏠

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{|x|^3}{3!}$.
- En déduire une valeur approchée de $\cos \frac{1}{2}$, à $\simeq 0.02$ près.

4XE Exercice 22 🏠 ÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

- Soit f, g continue sur $[a, b]$, avec f positive. Montrer qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = g(t_0) \int_a^b f(t) dt.$$

Qu'obtient-on si $f = \tilde{1}$?

Indication : Chercher à encadrer $\int_a^b f(t)g(t) dt$, en fonction de $\int_a^b f(t) dt$.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ et $x \in [a, b]$, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c)$$

- ★ Redémontrer ce résultat, en supposant seulement $f \in \mathcal{D}^{n+1}$.

TKY Exercice 23 🏠 FORMULE DE MACHIN, ET APPROXIMATION RATIONNELLE DE π .

- a) Montrer que $\arctan$ est 1-lip. b) Montrer que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left| \arctan x - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2k-1} \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{2n}$.

Indication : Trouver une expression explicite de la dérivée n -ième de $\arctan$, en partant de $\arctan'$.

- Montrer que $S_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)4^k}$ converge vers $\arctan \frac{1}{2}$. Déterminer n telle que $|S_n - \arctan \frac{1}{2}| \leq 10^{-20}$.
- Expliquer comment déterminer une approximation rationnelle de π à une précision 10^{-20} .

QIR Exercice 24 Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

- Limite de (u_n) .
- Développement asymptotique à deux termes de (u_n) .

HTA Exercice 25 ★ Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, s'annulant en n points $x_1, \dots, x_n$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x)| \leq \sup_{[a,b]} |f^{(n)}| \frac{|(x - x_1) \dots (x - x_n)|}{n!}$$

S7H Exercice 26 INÉGALITÉ DE KOLMOGOROV Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec f et f'' bornées, par M_0 et M_2 respectivement.

- a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. En appliquant l'inégalité de TL à l'ordre 2 entre x et $x + h$, montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.
b) En déduire que f' est bornée, par $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.
- a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $x, x + h$ et entre x et $x - h$, montrer que $|2hf'(x)| \leq M_2h^2 + 2M_0$.
b) En déduire que f' est bornée, par $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.
c) Montrer que la constante $\sqrt{2}$ est optimale.

01Z Exercice 27 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = 0$ et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall n, \|f^{(n)}\|_\infty \leq \lambda^n n!$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n n!$.

- Montrer que f est nulle sur $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$.
- Montrer que f est nulle.

PM8 Exercice 28 ★ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f = o_{\pm\infty}(x^n)$.

- Montrer qu'il existe x tel que $f^{(n+1)}(x) = 0$.
- Montrer que pour tout $r \geq n + 1$, il existe x tel que $f^{(r)}(x) = 0$.